حل نموذج بجروت

(805)-482

موعد شتاء 2019

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1 :

أ. معطى ان $a_5=162$ و $a_2=6$ إذاً اذا قسمنا a_6 على a_2 :-

$$\frac{a_5}{a_2}=\frac{162}{6} \longrightarrow \frac{\cancel{a_1}\cdot q^4}{\cancel{a_1}\cdot q}=\frac{162}{6} \longrightarrow q^3=27 \longrightarrow \boxed{q=3}$$

اذاً اساس المتوالية الهندسية 3.

نجد الحد الأول:

بما ان $a_2=6$ اذاً :

$$a_2=a_1\cdot q=6 \longrightarrow a_1\cdot 3=6 \longrightarrow \boxed{a_1=2}$$

ب. المتوالية في الاماكن الفردية هي:

$a_1, a_3, a_5, \ldots$

$a_1, a_1\cdot q^2, a_1\cdot q^4$

وهذه المتوالية حدها الاول هو $\boxed{a_1=3}$

واساسها هو $\boxed{q^2=9}$

نفرض ان عدد الحدود الفردية هو n اذاً

$$S_n=2\cdot\frac{9^n-1}{9-1}=1640$$

$$\Rightarrow 2\cdot\frac{9^n-1}{8}=1640 \longrightarrow \frac{9^n-1}{4}=1640 \longrightarrow 9^n-1=6560$$

$$\Rightarrow 9^n=6560+1 \Rightarrow 9^n=6561$$

نُشغّل ال $\ln$ على طرفي المعادلة لنحلها

$$\Rightarrow \ln 9^n=\ln 6561 \Rightarrow n\ln 9=\ln 6561$$

$$\Rightarrow n=\frac{\ln 6561}{\ln 9} \Rightarrow \boxed{n=4}$$

اذاً في المتوالية يوجد 4 حدود فردية

ج. بما ان عدد حدود المتوالية هو فردي لذلك عدد الحدود الفردية اكبر بـ 1 من عدد الحدود الزوجية اي عدد الحدود الزوجية هو 3.

اساس المتوالية في الاماكن الزوجية هو نفس اساس المتوالية في الاماكن الفردية اي 9 وحدها الاول هو a_2 اي $\boxed{a_2=6}$

اذا مجموع الحدود في الاماكن الزوجية هو:

$$S_3 = 6\cdot\frac{(9^3-1)}{9-1} = 6\cdot\frac{729-1}{8} = \frac{6}{8}\cdot 728 = 546$$

$$\boxed{\text{مجموع الحدود بالاماكن الزوجية} = S_3 = 546}$$

د (1) b_n هندسية لانهائية:

$$b_1 = \frac{5}{a_1} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$b_2 = \frac{5}{a_2} = \frac{5}{6}$$

$$\Longrightarrow q_b = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{5}{6}}{2.5} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2.5}$$

$$\Longrightarrow \boxed{q_b = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}}$$

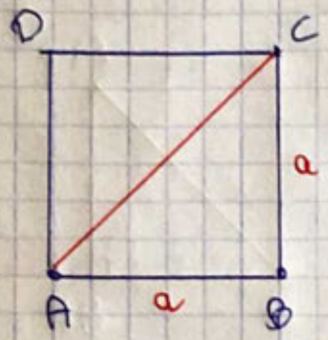
اذا اساس المتوالية b_n هو $\frac{1}{3}$ وحدها الاول هو 2.5

(2) مجموع حدود المتوالية اللانهائية هو: $S_{b_n} = \frac{b_1}{1-q}$

$$S_{b_n} = \frac{2.5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2.5}{\frac{2}{3}} = \frac{2.5\cdot 3}{2} = \frac{7.5}{2} = 3.75$$

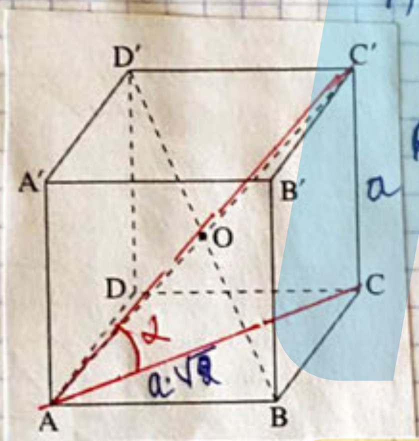
$$\boxed{S_{b_n} = 3.75}$$

حل سؤال 2



أ- قاعدة المكعب هي مربع طول ضلعه a
ولذلك بحسب فيثاغورس يتحقق

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$AC = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\cdot a = a\cdot\sqrt{2}$$
$$\boxed{AC = a\cdot\sqrt{2}}$$

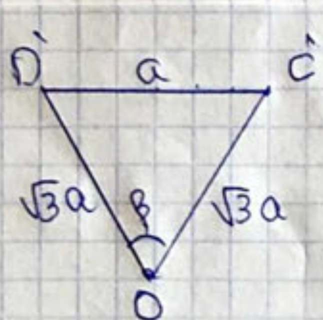


أ.2 - الزاوية بين قُطر المكعب AC' والقاعدة $ABCD$
هي الزاوية بين القطر AC' ومسقطه
على القاعدة $ABCD$. أي الزاوية بين AC' و AC
المبينة بالرسم (α)
المثلث ACC' هو مثلث قائم
الزاوية ويتحقق $tg\alpha = \frac{C'C}{AC}$

$$\rightarrow tg\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{\alpha = 35.264^\circ}$$

ب) قطر المكعب AC' هو الوتر في المثلث القائم الزاوية ACC'
ويتحقق:

$$(AC')^2 = AC^2 + (CC')^2$$
$$(AC')^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$
$$(AC')^2 = 3a^2 \rightarrow \boxed{AC' = \sqrt{3a^2} = a\cdot\sqrt{3}}$$



ج. الزاوية بين قطري المكعب هي $\measuredangle D'OC'$

$$OC' = D'O = \frac{1}{2} D'B = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}a$$

بحسب قانون الـ cos

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)\cdot\cos\beta$$

$$a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{2} \cdot \cos\beta$$

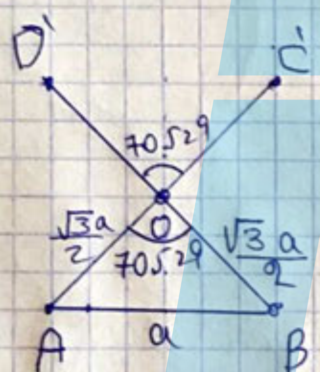
$$a^2 / a^2 = \frac{6}{4}a^2 - \frac{3a^2}{2} \cdot \cos\beta \;/ : a^2 \Rightarrow 1 = \overset{\frac{3}{2}}{\frac{6}{4}} - \frac{3}{2}\cos\beta$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{-3}{2} \cdot \cos\beta \Rightarrow \frac{-1}{-3} = \cos\beta \Rightarrow \frac{1}{3} = \cos\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 70.529}$$

بإذا الزاويه بين قطري المكعب هي:

$\boxed{70.529}$



د. بحسب قانون ال sin لحساب مساحة مثلث :

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin\measuredangle AOB$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \sin(70.529)$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{3a^2}{8} \cdot (0.943) = \boxed{0.3535a^2}$$

ه. اذا $S_{\Delta ABO} = 4 \cdot \sqrt{2}$ وايضا $S_{\Delta ABO} = 0{,}3535a^2$

اي يتحقق:

$$0.3535a^2 = 4 \cdot \sqrt{2}$$

$$a^2 = \frac{4\sqrt{2}}{0.3535} = 16$$

$$a^2 = 16$$

$$\boxed{a = \sqrt{16} = 4}$$

حل سؤال 3

$f(x) = \sin^2 x + 6$ في المجال $-\pi \le x \le \pi$

أ. نقاط تقاطع مع المحاور

تقاطع مع x ← $y=0$

$0 = \sin^2 x + 6 \longrightarrow -6 = \sin^2 x$

$0 \le \sin^2 x \le 1$ لكل x ولذلك ← لا يوجد حل للمعادلة وبالتالي لا يوجد تقاطع مع x

تقاطع مع y ← $x=0$

$f(0) = \sin^2(0) + 6 = 0 + 6 = 6$

تقاطع مع y $(0,6)$

ب. النقاط القصوى للدالة تحقق $f'(x)=0$.

$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = 0$

$\sin x = 0$ $\qquad$ $\cos x = 0$

$x = \pi k$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$k=0$ $\quad x=0$

$k=1$ $\quad x=\pi$

$k=-1$ $\quad x=-\pi$

$k=2$ $\quad x=2\pi$ ✗ خارج المجال

$k=-2$ $\quad x=-2\pi$ ✗

$k=0 \to x=\frac{\pi}{2}$

$k=1 \to x=1.5\pi$ ✗ خارج المجال

$k=-1 \to x=-\frac{\pi}{2}$

$k=-2 \to x=-1.5\pi$ ✗ خارج المجال

اذاً نقاط الشك هي (נקודות חשודות)

$x=-\pi$ // $x=-\frac{\pi}{2}$ // $x=0$ // $x=\frac{\pi}{2}$ // $x=\pi$

نبني جدول لتعيين النقاط:-

	$(-\frac{3\pi}{4})$		$(-\frac{\pi}{4})$		$(\frac{\pi}{4})$		$\frac{3\pi}{4}$	
x	$-\pi$	$-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<x<0$	0	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	π
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$	↓	↗		↘		↗		↘	
	מינימום קצה		מקסימום		מינימום		מקסימום		מינימום קצה

نعوض في المشتقة نقاط في كل مجال:

$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=+$ // $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)-$ // $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=+$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-$

نجد الـ y.

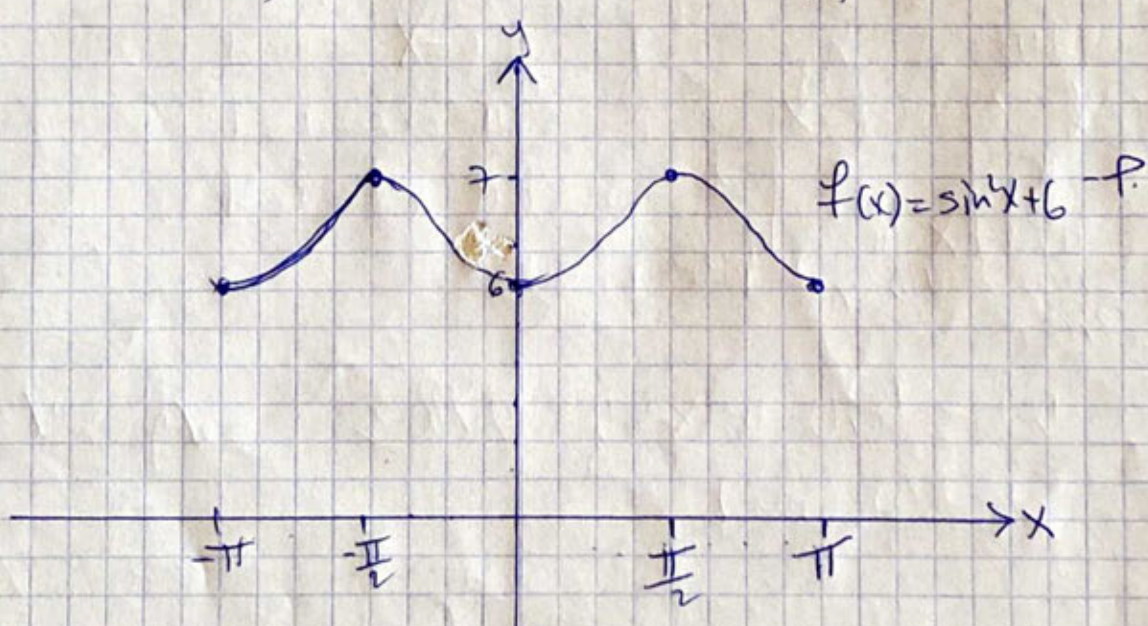
$f(-\pi)=\sin^2(-\pi)+6=6$ min קצה $(-\pi,6)$

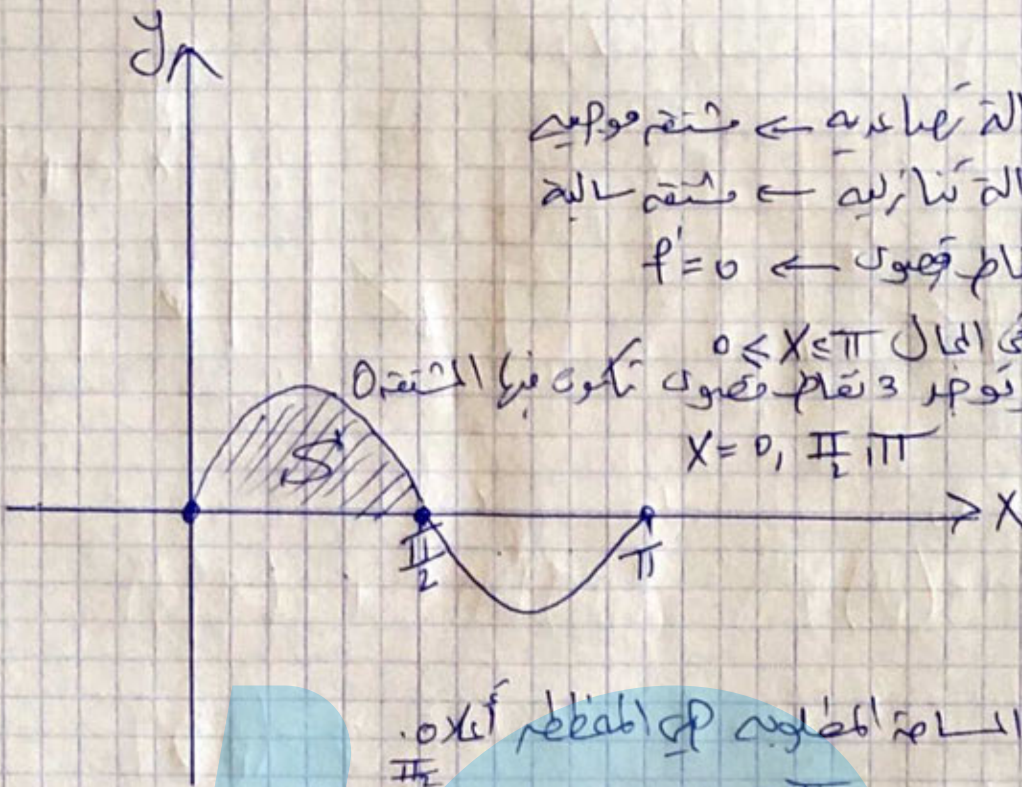
$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\underbrace{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{1}+6=7$ מקסימום $\left(-\frac{\pi}{2},7\right)$

$f(0)=0$ מינימום $(0,0)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}+6=7$ מקסימום $\left(\frac{\pi}{2},7\right)$

$f(\pi)=\sin^2(\pi)+6=6$ מינימום קצה $(\pi,6)$





د.1 دالة تصاعدية ← مشتقة موجبة

دالة تنازلية ← مشتقة سالبة

نقاط قصوى ← $f'=0$

في المجال $0 \le x \le \pi$

توجد 3 نقاط قصوى تكون فيها المشتقة 0

$x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$

د.2 المساحة المطلوبة في المخطط أعلاه.

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}+6=7$$

$$f(0)=\sin^2(0)+6=6$$

$$S=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=7-6=1$$

وحدة مساحة

حل سؤال 4

$$f(x)=(x+2)\cdot e^{x+3}$$

أ- مجال تعريف الدالة:

الدالة معرفة لكل x

ب- الدالة $f(x)=(x+2)\cdot e^{x+3}$ موجبة عندما تتحقق

$$(x+2)\cdot\underbrace{e^{x+3}}_{\text{هنا المركب موجب دائماً}}$$

وبالتالي الدالة موجبة لكل x يحقق $x+2>0 \to \boxed{x>-2}$

اذاً الدالة موجبة لكل $\boxed{x>-2}$

ج- $f'(x)=0$ ← النقاط القصوى

$$f'(x)=1\cdot e^{x+3}+(x+2)\cdot e^{x+3}=e^{x+3}(1+x+2)$$

$$\boxed{f'(x)=e^{x+3}(x+3)}$$

$$f'(x)=0 \to \underbrace{e^{x+3}}_{\text{لا يساوي صفراً ابداً}}(x+3)=0$$

$x+3=0 \to \boxed{x=-3}$

من هنا نبني جدولاً يصف النقاط:

x	x<-3	-3	x>-3
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

$f'(-4)=-$

$f'(0)=2$ +

$f(-3)=(-3+2)e^{-3+3}$

$f(-3)=-1\cdot e^{0}=-1$

$\boxed{(-3,-1)\ \text{נק' מינימום}}$

د.

نجد النقاط الصفرية للدالة

تقاطع مع x ← $y=0$

$$0=(x+2)\cdot \underbrace{e^{x+3}}_{\text{لا يساوي صفر}}$$

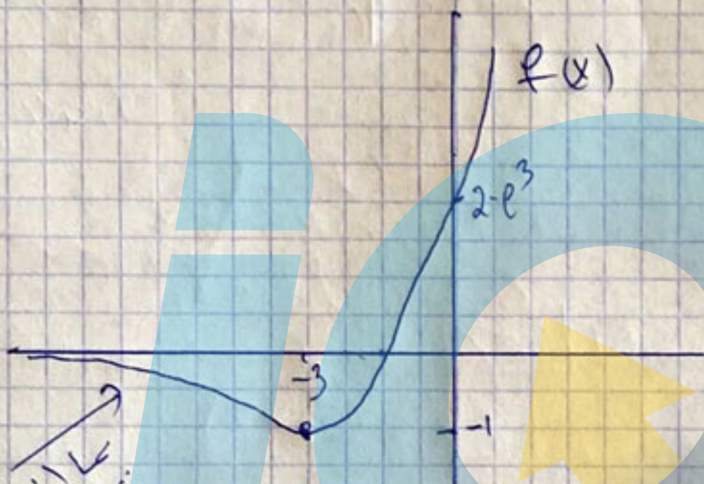
$$\downarrow$$

$$0=x+2$$

$$\boxed{-2=x} \longrightarrow (0,-2)$$

تقاطع مع y: ← $x=0$

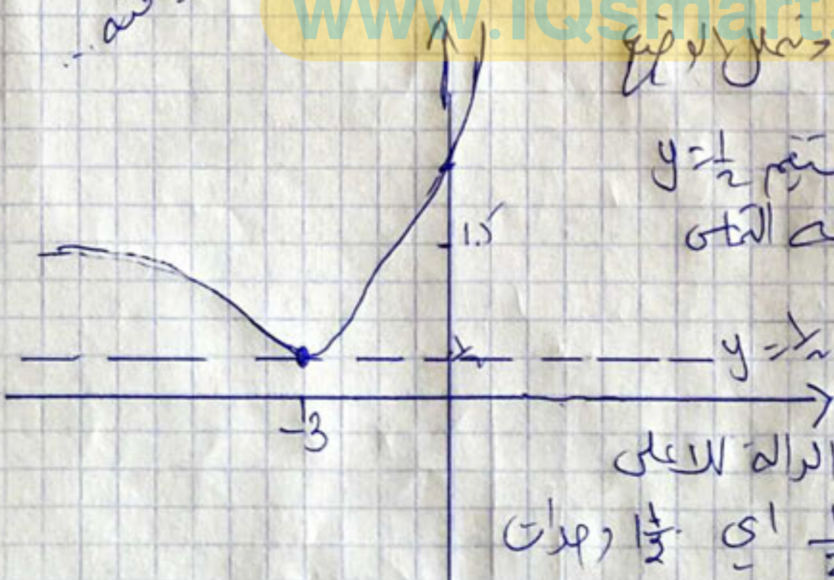
$$f(0)=(0+2)\cdot e^{0+3}=2\cdot e^3$$



بما ان الدالة لا تقطع المحور x في هذا الجزء انما تقترب منه..

$g(x)=f(x)+a$

نرسم المستقيم $y=\frac{1}{2}$ ونحلل الوضع



لكي تمس الدالة المستقيم $y=\frac{1}{2}$ يجب ان تكون نقطة التماس هي نقطة الـ min للدالة

اي يجب ان نحرك الدالة للاعلى من -1 وحتى $\frac{1}{2}$ اي $1\frac{1}{2}$ وحدات

اذاً

$$\boxed{a=1\frac{1}{2}}$$

حل سؤال 5

$f(x) = 2\ln x + 2\ln(x^2) - 3$

أ- مجال تعريف الدالة $\boxed{x>0}$

ب- تقاطع الدالة $f(x)$ مع المحور x - $(y=0)$

$0 = 2\ln x + 2\ln x^2 - 3$

$0 = 2\ln x + 2\cdot 2\ln x - 3 \rightarrow 2\ln x + 4\ln x - 3 = 0$

$6\ln x = 3 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$

نقطة تقاطع الدالة مع المحور x هي : $\boxed{(\sqrt{e}, 0)}$

* انتبه لا يوجد تقاطع مع محور y لأن مجال تعريف الدالة $x>0$

ج- مجالات تصاعد وتنازل الدالة

نبسط الدالة:

$f(x) = 2\ln x + 2\cdot 2\ln x - 3$

$f(x) = 6\ln x - 3$

$f'(x) = 6\cdot\frac{1}{x} = \frac{6}{x} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \frac{6}{x} = 0$

لا يوجد حل إذاً الدالة إما تصاعدية او تنازلية في كل مجال تعريفها

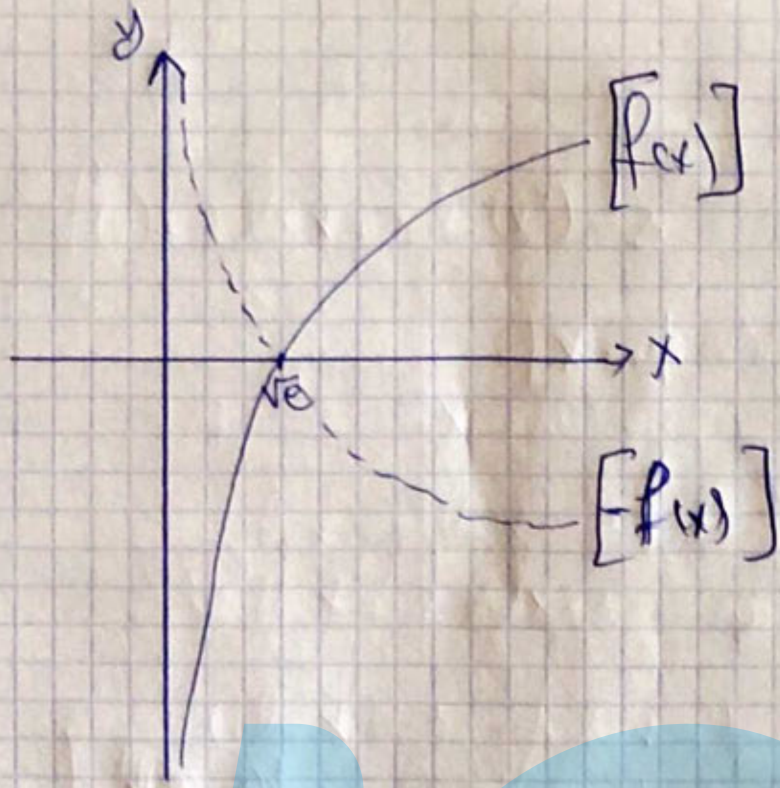
بما ان الدالة معرفة لكل $x>0$ اذاً نختار نقطة في هذا المجال مثلاً $x=e$ ونعوض في المشتقة ونجد اشارة المشتقة ونحدد حسبها هل هي تصاعدية ام تنازلية في المجال كله.

$f'(e) = \frac{6}{e} > 0$

اذا الدالة تصاعدية لكل $x>0$

والمجال التنازلي $\emptyset$

د. ارسم تقريبي للدالة



م